Fusée Ariane.

Question 1 :

Une fusée de masse initiale M_0 (carburant et comburant compris) est propulsée à partir de $t = 0$ par l'éjection des gaz brûlés avec un débit massique D constant et une vitesse relative de module u constant. A quelle condition la fusée décolle-t-elle ? (A.N. $M_0 = 200$ tonnes, $D = 1600\,\mathrm{kg.s^{-1}}$, $g = 9,8\,\mathrm{m.s^{-2}}$ et $u = 1500\,\mathrm{m.s^{-1}}$.)

Commençons par mettre en équation le mouvement supposé vertical de la fusée. Définissons le système comme le contenu de la fusée à l'instant t, de masse $M(t) = M_0 - D\,t$ et de vitesse $\overrightarrow{V}(t) = V(t)\,\overrightarrow{e_z}$. A l'instant $t + \mathrm{d}t$ le système se compose d'une part du contenu de la fusée à cet instant, de masse $M(t + \mathrm{d}t) = M(t) - D\,\mathrm{d}t$ et de vitesse $\overrightarrow{V}(t + \mathrm{d}t) = V(t + \mathrm{d}t)\,\overrightarrow{e_z}$ avec $V(t + \mathrm{d}t) = V(t) + \dot{V}(t)\,\mathrm{d}t$ (développement de Taylor) et d'autre part de la masse $\delta m = D\,\mathrm{d}t$ de gaz éjectés entre t et $t + \mathrm{d}t$, de vitesse relative $\overrightarrow{u} = -u\,\overrightarrow{e_z}$ et de vitesse absolue $(V(t) - u)\,\overrightarrow{e_z}$. En projection sur Oz, la quantité de mouvement à l'instant t est :

$$P_z(t) = M(t)\,V(t)$$

et à l'instant $t + \mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}P_z(t + \mathrm{d}t) &= M(t + \mathrm{d}t)\,V(t + \mathrm{d}t) + \delta m\,(V(t) - u) = \\ &(M(t) - D\,\mathrm{d}t)\,(V(t) + \dot{V}(t)\,\mathrm{d}t) + D\,\mathrm{d}t\,(V(t) - u) = \\ &M(t)\,V(t) - D\,\mathrm{d}t\,V(t) + M(t)\,\dot{V}(t)\,dt - D\,\dot{V}(t)\,\mathrm{d}t^2 + D\,\mathrm{d}t\,V(t) - D\,\mathrm{d}t\,u = \\ &M(t)\,V(t) + M(t)\,\dot{V}(t)\,dt - D\,\dot{V}(t)\,\mathrm{d}t^2 - D\,\mathrm{d}t\,u\end{aligned}$$

Par différence et en supprimant le terme en dt car il tend vers 0 quand dt tend vers 0

$$\sum F_z = \frac{\mathrm{d}P_z}{\mathrm{d}t} = M(t)\,\dot{V}(t) - D\,u \qquad \text{ou} \qquad \sum F_z + D\,u = M(t)\,\dot{V}(t)$$

Pour que la fusée décolle, on veut $\dot{V}(0) > 0$ et puisque la fusée ne repose plus sur le sol (pas de réaction du support) et ne subit qu'une force de frottement fluide négligeable de la part de l'air (vitesse nulle au décollage) on a $F_z = -M(0)\,g$. On veut donc

$$-M(0)\,g + D\,u = M(0)\,\dot{V}(0) > 0 \qquad \text{soit} \qquad D\,u > M(0)\,g$$

Or $D\,u = 2,4\,10^6$ N et $M(0)\,g = 1,96\,10^6$ N ; la fusée décolle !

Question 2 :

On suppose le mouvement de la fusée vertical. Calculer la vitesse à l'instant t puis l'altitude atteinte à cet instant (On néglige les frottements dus à l'air). Le carburant du premier étage est épuisé au bout de 62,5 s ; quelle est la vitesse finale et l'altitude atteinte ? (+A.N.)

L'équation $\sum F_z + D\,u = M(t)\,\dot{V}(t)$ devient ici

$$D\,u - M(t)\,g = M(t)\,\dot{V}(t) \qquad \text{où} \qquad M(t) = M_0 - D\,t$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -g + \frac{D\,u}{M_0 - D\,t} = -g - u\,\frac{-D}{M_0 - D\,t}$$

Une intégration élémentaire donne

$$V(t) = -g\,t - u\,\ln(M_0 - D\,t) + Cte$$

Or à $t = 0$, $V(0) = 0$ d'où

$$V(t) = -g\,t - u\,\ln(M_0 - D\,t) + u\,\ln(M_0)$$

Et au bout du temps $T = 62,5$ s,

$$V(T) = -g\,T + u\,\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - D\,T}\right) = 1500\,\ln\left(\frac{200}{200 - 62,5 * 1,6}\right) - 9,8 \times 62,5 = 427\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

Une intégration (par parties pour le terme central) conduit avec un peu d'entraînement à

$$Z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 - u\,t\,\ln(M_0 - D\,t) + u\,t + \frac{u\,M_0}{D}\,\ln(M_0 - D\,t) + u\,t\,\ln(M_0) + Cte$$

Or à $t = 0$, $Z(0) = 0$, d'où

$$Z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 - u\,t\,\ln(M_0 - D\,t) + u\,t + \frac{u\,M_0}{D}\,\ln(M_0 - D\,t) + u\,t\,\ln(M_0) - \frac{u\,M_0}{D}\,\ln(M_0)$$

qu'on peut réécrire

$$Z(t) = u\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 - u\left(\frac{M_0}{D} - t\right)\,\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - D\,t}\right)$$

Quelques calculs conduisent sans difficulté à $Z(t) = 9,63$ km

Question 3 :
Quel intérêt y a-t-il à concevoir des fusées à étages ?

La poussée du second moteur est le produit $D\,u$ de son débit D et de la vitesse d'éjection u des gaz, c'est le terme qui s'ajoute à $\sum F_z$ dans l'expression de $M(t)\,\dot{V}(t)$ établie plus haut. Larguer les structures du premier étage permet de diminuer la masse et à poussée égale d'augmenter l'accélération, tout simplement.